Halpern's iteration for a sequence of quasinonexpansive type mappings

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治
Koji Aoyama
Graduate School of Social Sciences,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47J25, 47J20, 47H09.
Keywords and phrases. 不動点, 非拡大写像, 擬非拡大写像, 近似アルゴリズム.

1 はじめに

H を Hilbert 空間, C を H の閉凸部分集合とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $u, x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n) S_n x_n \tag{1.1}$$

で定義する. ただし, $\alpha_n \in [0,1]$, S_n は C から C への写像とする. 本稿では, この点列 $\{x_n\}$ の収束性に関する結果を取り扱う.

式 (1.1) で定義される点列を扱った先行研究には様々なものがある [1, 2, 4–8, 11, 13–15, 17, 19–22, 25–28]. このうち, 本稿の主結果 (定理 4.1) と直接関係するのは文献 [17, 21] である. 文献 [21] では, 可換な非拡大写像 T, U により, 写像 S_n が

$$S_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} T^i U^j \tag{1.2}$$

と表されるとき, ある仮定のもとで, $\{x_n\}$ が T と U の共通不動点に強収束することを示している [21, Theorem 1]. また, 文献 [17] では, S_n が Hilbert 空間上の極大単調作用素 A のリゾルベントのとき, ある仮定のもとで, $\{x_n\}$ が A の零点に強収束することを示している [17, Theorem 1].

本稿では, 各 S_n が擬非拡大のとき, 写像列 $\{S_n\}$ がある条件を満たすならば, (1.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ が強収束することを示す (定理 4.1). 続いて, 定理 4.1 と上にあげた二つの先行研究との関係を説明する. 最後に, 定理 4.1 の一般化についての考察を述べる.

2　準備

本稿では, H を実 Hilbert 空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, I を H 上の恒等写像, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合, $\mathbb{R}$ を実数の集合とする. H の点列 $\{x_n\}$ が x に強収束するとき $x_n \to x$, 弱収束するとき $x_n \rightharpoonup x$ と表す.

C を H の空でない部分集合, T を C から H への写像とする. T の不動点の集合を $\mathrm{F}(T)$ と表す. つまり, $\mathrm{F}(T) = \{z \in C \colon z = Tz\}$ である. T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう. F を H の空でない部分集合とする. 写像 T が F に関して擬非拡大 (quasinonexpansive) であるとは, すべての $x \in C$ と $p \in F$ に対して $\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$ が成り立つときをいう. 不動点をもつ写像 T が $\mathrm{F}(T)$ に関して擬非拡大のとき, 単に擬非拡大であるという. λ を実数とする. 写像 T が λ-hybrid であるとは [3, 9, 10, 24], すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2(1 - \lambda) \langle x - Tx, y - Ty \rangle$$

が成り立つときをいう. 定義から, 次のことが容易にわかる.

- 1-hybrid 写像は, 非拡大である.
- 不動点をもつ λ-hybrid 写像は, 特に, 不動点をもつ非拡大写像は, (不動点の集合に関して) 擬非拡大である.
- 写像 T が F に関して擬非拡大ならば, $C \cap F \subset \mathrm{F}(T)$.

また, C が閉凸のとき, 擬非拡大写像の不動点集合は閉凸であることが知られている [16, Theorem 1]. よって, λ-hybrid 写像, 特に, 非拡大写像の不動点集合も閉凸である. さらに, 次の補助定理が知られている.

補助定理 2.1 ([21, Lemma 1])**.** D を H の空でない有界閉凸部分集合, T および U を D から D への非拡大写像とし, $UT = TU$ を仮定する. 写像 $S_n \colon D \to D$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.2) で定義する. ただし, $T^0 = U^0 = I$ とする. このとき,

$$\lim_n \sup\{\|S_n(x) - TS_n(x)\| : x \in D\} = 0, \quad \lim_n \sup\{\|S_n(x) - US_n(x)\| : x \in D\} = 0$$

が成り立つ.

補助定理 2.2 ([30, 問題 6.2.3])**.** C を H の空でな閉凸部分集合, $T \colon C \to C$ を非拡大写像, $\{x_n\}$ を C の点列とする. このとき, $x_n - Tx_n \to 0$ かつ $x_n \rightharpoonup p$ ならば, $p \in \mathrm{F}(T)$.

D を H の空でない閉凸部分集合とする．H から D の上への距離射影 (metric projection) を P_D と表す．つまり, $x \in H$ のとき, $P_D(x)$ は

$$\|x - P_D(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in D\}$$

を満たす唯一の D の点である．距離射影は非拡大であることが知られている．さらに, 任意の $x \in H$ と $y \in D$ に対して,

$$\langle x - P_D(x), y - P_D(x)\rangle \leq 0 \tag{2.1}$$

が成り立つことが知られている [30]．ここでは, 距離射影に関する二つの補助定理を示しておく．

補助定理 2.3. D, F を H の空でない閉凸部分集合, $u \in D$, $P_D P_F(u) \in F$ とする．このとき, $P_F(u) \in D$.

証明. $z = P_F(u)$ とおく．$u \in D$ だから, (2.1) より, $\langle u - P_D(z), P_D(z) - z\rangle \geq 0$ である．さらに, 仮定より $P_D(z) \in F$ だから, (2.1) より,

$$0 \geq \langle u - z, P_D(z) - z\rangle = \langle u - P_D(z), P_D(z) - z\rangle + \|P_D(z) - z\|^2 \geq \|P_D(z) - z\|^2.$$

したがって, $P_D(z) = z$. よって, $P_F(u) = z \in D$. □

補助定理 2.4. C, D を H の空でない部分集合, F を H の空でない閉凸部分集合, $S\colon C \to H$ を F に関して擬非拡大な写像とし, $C \subset D$ を仮定し, 写像 $\hat{S}\colon D \to H$ を

$$\hat{S}x = \begin{cases} Sx & (x \in C); \\ P_F(x) & (x \in D \setminus C) \end{cases}$$

で定義する．このとき, $\hat{S}$ は F に関して擬非拡大である．

証明. $x \in D$, $z \in F$ とする．$x \in C$ のとき, S は F に関して擬非拡大だから, $\left\|\hat{S}x - z\right\| = \|Sx - z\| \leq \|x - z\|$. 一方, $x \in D \setminus C$ のとき, 距離射影 P_F は非拡大で, $P_F(z) = z$ だから, $\left\|\hat{S}x - z\right\| = \|P_F(x) - P_F(z)\| \leq \|x - z\|$. 以上より, $\hat{S}$ は F に関して擬非拡大であることを示せた. □

3　条件 (S) を満たす写像列

次節で述べる主結果 (定理 4.1) において「写像列が条件 (S) を満たす」という仮定が重要である．この節では, この条件の定義述べ, それに関連する補助定理, および, 条件 (S)

を満たす写像列の例を紹介する.

条件 (S) の定義を述べる前に, 記号を一つ導入しておく. Hilbert 空間 H の点列 $\{x_n\}$ の弱収積点の集合を $\omega_w(\{x_n\})$ で表す. つまり, $z \in \omega_w(\{x_n\})$ であるとは, $x_{n_i} \rightharpoonup z$ となる $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在することである.

C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $\{T_n\}$ を C から C への写像の列, F を H の空でない閉凸部分集合とする. $\{T_n\}$ が F に関して条件 (S) を満たすとは, 任意の C の有界点列 $\{x_n\}$ に対して, $\omega_w(\{T_n x_n\}) \subset F$ が成り立つときをいう. D が H の空でない閉凸部分集合で, $D \subset F$ のとき, $\{T_n\}$ が F に関して条件 (S) を満たすならば, 定義より直ちに, $\{T_n\}$ が D に関して条件 (S) を満たすことがわかる.

註 1. 文献 [1] では, 条件 (S) を考えるとき, 写像列の定義域 C を閉凸としている. しかし, 本稿では C を閉凸と限定しないことにする.

条件 (S) を満たす写像列に関する補助定理を示す.

補助定理 3.1. *H を Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合, $\{T_n\}$ を C から C への写像の列, F を H の空でない閉凸部分集合とし, $\{T_n\}$ が F に関して条件 (S) を満たすと仮定する. このとき, $\bigcap_n \mathrm{F}(T_n) \subset C \cap F$. さらに, 各 T_n が F に関して擬非拡大ならば, $\bigcap_n \mathrm{F}(T_n) = C \cap F$.*

証明. $z \in \bigcap_n \mathrm{F}(T_n)$ とする. $z \in C$ であるから, $z \in F$ であることを示せばよい. $x_n \equiv z$ として点列 $\{x_n\}$ を定義すると, $\{x_n\}$ は C の有界点列であり, $T_n x_n = T_n z = z$ だから, $T_n x_n \rightharpoonup z$. したがって, $\{T_n\}$ が F に関して条件 (S) を満たすことより, $z \in F$. 以上より, $z \in C \cap F$ が示せた.

次に, 各 T_n が F に関して擬非拡大であると仮定する. このとき, $\mathrm{F}(T_n) \supset C \cap F$ が成り立つから, $\bigcap_n \mathrm{F}(T_n) \supset C \cap F$. よって, 前半の結論と合わせると, $\bigcap_n \mathrm{F}(T_n) = C \cap F$ となる. □

補助定理 3.2. *H を Hilbert 空間, C を H の空でない凸部分集合, F を H の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を F に関して擬非拡大な C から C への写像の列とし, $\{T_n\}$ が F に関して条件 (S) を満たすと仮定する. このとき, $\overline{C} \cap F \neq \emptyset$. ここで, $\overline{C}$ は C の閉包である.*

証明. $y \in C$, $z \in F$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_n \equiv y$ で定義すると, $\{x_n\}$ は C の有界点列である. T_n は F に関して擬非拡大だから, $\|T_n x_n - z\| = \|T_n y - z\| \leq \|y - z\|$. よって, $\{T_n x_n\}$ も C の有界点列である. ゆえに, $\{T_n x_n\}$ の部分列で弱収束するものが存在する (例えば, [23, 定理 2.114]). いま, $T_{n_i} x_{n_i} \rightharpoonup v$ とする. $\overline{C}$ は弱閉だから (例えば, [29, 定理

1.2.2] および [23, 命題 2.100]), $v \in \overline{C}$. また, $\{T_n\}$ は F に関して条件 (S) を満たすから, $v \in F$. 以上より, $v \in \overline{C} \cap F$. つまり, $\overline{C} \cap F \neq \emptyset$ である. □

条件 (S) を満たす写像列の例をいくつか紹介する. まず, 補助定理 2.1 と 2.2 を使うと, 次の補助定理が得られる.

補助定理 3.3. H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, T および U を C から C への非拡大写像とし, $UT = TU$ を仮定する. 写像 $S_n \colon C \to C$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.2) で定義し, さらに, $\mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(U) \neq \emptyset$ を仮定する. このとき, $\{S_n\}$ は $\mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(U)$ に関して条件 (S) を満たす.

証明. $\{x_n\}$ を C の有界な点列とし, $S_{n_i} x_{n_i} \rightharpoonup z$ とする. また, $v \in \mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(U)$ とする. $\{x_n\}$ は有界だから, $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset \bar{B}(v, r)$ となる $r > 0$ が存在する. ただし, $\bar{B}(v, r) = \{y \in H \colon \|y - v\| \leq r\}$ である. ここで, $D = C \cap \bar{B}(v, r)$ とおくと, D は H の空でない有界閉凸集合である. また, T が非拡大であり, $v \in \mathrm{F}(T)$ であることに注意すると, $y \in D$ のとき $\|Ty - v\| = \|Ty - Tv\| \leq \|y - v\| \leq r$. つまり, $T(D) \subset D$ である. 同様に, $U(D) \subset D$ も示せる (このことから, もちろん $S_n(D) \subset D$). よって, 補助定理 2.1 より, $n \to \infty$ のとき

$$\|S_n(x_n) - TS_n(x_n)\| \leq \sup\{\|S_n(y) - TS_n(y)\| : y \in D\} \to 0.$$

よって, $S_{n_i}(x_{n_i}) - TS_{n_i}(x_{n_i}) \to 0$. したがって, 補助定理 2.2 より, $z \in \mathrm{F}(T)$. 同様にして, $z \in \mathrm{F}(U)$ であることもわかる. 以上より, $\{S_n\}$ が $\mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(U)$ に関して条件 (S) を満たすことが示せた. □

補助定理 3.4 ([1, Lemma 3])**.** H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T \colon C \to C$ を不動点をもつ λ-hybrid 写像とし, 写像 $S_n \colon C \to C$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対して $S_n = (1/n) \sum_{k=1}^{n} T^{k-1}$ で定義する. ただし, $T^0 = I$ とする. このとき, $\{S_n\}$ は $\mathrm{F}(T)$ に関して条件 (S) を満たす.

補助定理 3.3 と似た次の結果も知られている.

補助定理 3.5 ([18, Corollary 3.6])**.** H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $T \colon C \to C$ を λ-hybrid 写像, $U \colon C \to C$ を μ-hybrid 写像とし, 写像 $S_n \colon C \to C$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} T^k U^l$$

で定義する．ただし, $T^0 = U^0 = I$ とする．さらに, $TU = UT$ および $\mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(U) \neq \emptyset$ を仮定する．このとき, $\{S_n\}$ は $\mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(U)$ に関して条件 (S) を満たす.

補助定理 3.5 において $U = I$ とすると, 補助定理 3.4 となるので (ただし, n が一つずれている). 補助定理 3.5 は, 補助定理 3.4 の一般化である.

次の例を述べる前に, 少し準備が必要である.

A を H から H への集合値写像とする．A と A のグラフ $\{(x, x') \in H \times H : x' \in Ax\}$ を同一視し, $A \subset H \times H$ と表す．A が単調 (monotone) 作用素であるとは, すべての $(x, x'), (y, y') \in A$ に対して $\langle x - y, x' - y' \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう．単調作用素 A が極大であるとは,「$B \subset H \times H$ が単調作用素で $A \subset B$ ならば $A = B$」が成り立つときをいう．$(z, 0) \in A$ となる点 z を A の零点 (zero point) といい, 零点の集合を $A^{-1}0$ で表す．つまり, $A^{-1}0 = \{z \in H : (z, 0) \in A\}$ である.

$A \subset H \times H$ を極大単調作用素, $\rho > 0$ とする．このとき, $(I + \rho A)^{-1}$ は, H から $\{x \in H : Ax \neq \emptyset\}$ の上への一価写像であることが知られている．写像 $(I + \rho A)^{-1}$ は A のリゾルベント (resolvent) とよばれ, J_ρ で表す．J_ρ は非拡大であり, $\mathrm{F}(J_\rho) = A^{-1}0$ であることが知られている [30].

次の補助定理は, [12, Lemma 3.6] の特別な場合である.

補助定理 3.6 ([1, Lemma 4])**.** H を Hilbert 空間, $A \subset H \times H$ を零点をもつ極大単調作用素, $\{\rho_n\}$ を ∞ に発散する正の実数列とする．このとき, $\{(I + \rho_n A)^{-1}\}$ は $A^{-1}0$ に関して条件 (S) を満たす.

4　擬非拡大写像の列に関する強収束定理

本節では, 擬非拡大写像の列に関する強収束定理 (次の定理 4.1), それに関連する結果を紹介する.

定理 4.1 ([1, Theorem 1])**.** H を Hilbert 空間, C と F を H の空でない閉凸部分集合, $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の数列, $\{S_n\}$ を F に関して擬非拡大な C から C への写像の列とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $u \in C$, $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) S_n x_n \tag{4.1}$$

で定義する．さらに, $F \subset C$, $\alpha_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ であり, $\{S_n\}$ は F に関して条件 (S) を満たすと仮定する．このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束する.

註 2. 補助定理 3.1 より, 定理 4.1 の仮定のもとで, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n)$ であることがわかる.

定理 4.1 と前節の補助定理を使うと次の定理が得られる.

定理 4.2. H, C, u および $\{\alpha_n\}$ を定理 4.1 と同じとし, T と U を C から C への非拡大写像とし, 点列 $\{x_n\}$ を, $u \in C$, $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} T^i U^j x_n$$

で定義する. ただし, $T^0 = U^0 = I$ とする. さらに, $UT = TU$ および $F = \mathrm{F}(T) \cap \mathrm{F}(U) \neq \emptyset$ を仮定する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束する.

証明. T と U は非拡大だから, $\mathrm{F}(T)$ および $\mathrm{F}(U)$ は閉凸である. よって, F も閉凸である. 写像 $S_n \colon C \to C$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.2) で定義する. このとき, S_n は非拡大で, $F \subset \mathrm{F}(S_n)$ だから, 各 S_n は F に関して擬非拡大である. また, 補助定理 3.3 より, $\{S_n\}$ は F に関して条件 (S) を満たすことがわかる. よって, 定理 4.1 より, 結論が得られる. □

註 3. 定理 4.2 は, [21, Theorem 1] とほとんど同じである. 実際, 定理 4.2 で $x_1 = u$ としたものが, [21, Theorem 1] である. なお, $\{S_n\}$ が非拡大写像列のとき, (4.1) で定義される点列の収束には, 初期点 x_1 は影響を与えないことが知られている. これについて詳しくは, [15, p. 156] または [22, Proposition 5] を参照するとよい.

定理 4.3 ([1, Corollary 2])**.** H と $\{\alpha_n\}$ は定理 4.1 と同じとし, $A \subset H \times H$ を零点をもつ極大単調作用素, $\{\rho_n\}$ を ∞ に発散する正の実数列とし, H の点列 $\{x_n\}$ を, $u \in H$, $x_1 \in H$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)(I + \rho_n A)^{-1} x_n$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}(u)$ へ強収束する.

証明. $S_n = (I + \rho_n A)^{-1}$ とおく. S_n は H から H への非拡大写像であり, $\mathrm{F}(S_n) = A^{-1}0$ であるから, S_n は $A^{-1}0$ に関して擬非拡大である. さらに, 補助定理 3.6 より, $\{S_n\}$ が $A^{-1}0$ に関して条件 (S) を満たすことがわかる. したがって, 定理 4.1 より結論が得られる. □

註 4. 系 4.3 は, [17, Theorem 1] とほとんど同じである. 実際, 系 4.3 で $x_1 = u$ としたものが, [17, Theorem 1] である. これらの関係については, 註 3 を参照せよ.

註 5. [1, Corollary 2] には誤植がある．“Let $\{x_n\}$ be a sequence in C defined by $x_1 \in C$ and” の部分は, 正しくは “Let $\{x_n\}$ be a sequence in H defined by $x_1 \in H$ and” である．

次に, 定理 4.1 を使って, λ-hybrid 写像の収束定理を示す．

定理 4.4 ([1, Theorem 2])**.** H, C および $\{\alpha_n\}$ を定理 4.1 と同じとし, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T\colon C \to C$ を不動点をもつ λ-hybrid 写像, C の点列 $\{x_n\}$ を, $u \in C$, $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^{k-1}x_n \tag{4.2}$$

で定義する．ただし, $T^0 = I$ とする．このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{F}(T)}(u)$ へ強収束する．

証明. $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^{k-1}$ とおく．$y \in C$ および $z \in \mathrm{F}(T)$ とする．T は擬非拡大だから,

$$\left\|T^{k-1}y - z\right\| \le \left\|T^{k-2}y - z\right\| \le \cdots \le \|y-z\|.$$

よって,

$$\|S_n y - z\| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^{k-1}y - z\right\| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|T^{k-1}y - z\right\| \le \|y-z\|$$

が成り立つ．つまり, S_n は $\mathrm{F}(T)$ に関して擬非拡大である．さらに, 補助定理 3.4 より, $\{S_n\}$ は $\mathrm{F}(T)$ に関して条件 (S) を満たすことがわかる．したがって, 定理 4.1 より結論が得られる． □

註 6. 定理 4.4 と [9, Lemma 2.5] より, [20, Theorem 3.2] および [1, Corollary 1] が得られる．[1, Corollary 1] より, [19, Theorem 4.1] が得られる．

註 7. 定理 4.4 は, 文献 [18] で一般化されている．補助定理 3.5 と定理 4.1 より, 可換な二つの hybrid 写像に関する収束定理 [18, Theorem 4.3] が得られる．[18, Theorem 4.3] の二つの hybrid 写像のうちの一つを恒等写像とした場合が, 定理 4.4 である．

5　定理 4.1 の一般化

本節では, 定理 4.1 を少し一般化した次の定理を証明する．

定理 5.1. H を Hilbert 空間, C を H の空でない凸部分集合, F を H の空でない閉凸部分集合とし, $\{\alpha_n\}$, $\{S_n\}$ および $\{x_n\}$ は定理 4.1 と同じとする．このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束する．

定理 4.1 の証明と同様な手順により定理 5.1 を示すことができるが, ここでは, 以下の補助定理と定理 4.1 を使って定理 5.1 を証明する．

補助定理 5.2. H を Hilbert 空間, C を H の空でない凸部分集合, F を H の空でない閉凸部分集合, $\{S_n\}$ を F に関して擬非拡大な C から C への写像の列とし, $\check{F} = \overline{C} \cap F$ とおき, $\{S_n\}$ は F に関して条件 (S) を満たすと仮定する．ここで, $\overline{C}$ は C の閉包である．このとき,

(1) $\check{F}$ は空ではなく, 閉凸である．

さらに, $\overline{C}$ から $\overline{C}$ への写像の列 $\{\hat{S}_n\}$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\hat{S}_n(x) = \begin{cases} S_n x & (x \in C); \\ P_{\check{F}}(x) & (x \in \overline{C} \setminus C) \end{cases} \tag{5.1}$$

で定義する．このとき, 以下が成り立つ．

(2) 各 $\hat{S}_n$ は F に関して擬非拡大である．
(3) $\{\hat{S}_n\}$ は $\check{F}$ に関して条件 (S) を満たす．
(4) $u \in C$ ならば, $P_F(u) \in \check{F}$, つまり, $P_F(u) = P_{\check{F}}(u)$.

証明. まず (1) を示す．仮定より, $\overline{C}$ は閉凸だから, $\check{F}$ は閉凸である．また, 補助定理 3.2 より, $\check{F} \neq \emptyset$ である．

次に (2) を示す．(1) より, $\check{F}$ は H の空でない閉凸部分集合で, $\check{F} \subset \overline{C}$ あるから, 写像 $\hat{S}_n \colon \overline{C} \to \overline{C}$ は well-defined である．また, S_n は F に関して擬非拡大であるから, 補助定理 2.4 より, 各 $\hat{S}_n$ は F に関して擬非拡大である．

次に (3) を示す． $\{y_n\}$ を $\overline{C}$ の有界点列とし, $z \in \omega_w\bigl(\{\hat{S}_n y_n\}\bigr)$ とする．このとき, 狭義単調増加な関数 $\tau \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在し, $m \to \infty$ のとき $\hat{S}_{\tau(m)} y_{\tau(m)} \rightharpoonup z$ である． $\Lambda = \{m \in \mathbb{N} \colon y_{\tau(m)} \in C\}$ とおき, Λ が有限集合である場合とそうでない場合の二つに分けて考える．まず, Λ が有限集合のとき, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $m \geq N$ に対して $y_{\tau(m)} \in \overline{C} \setminus C$ となる．よって, $m \geq N$ のとき, $\hat{S}_{\tau(m)} y_{\tau(m)} = P_{\check{F}}\bigl(y_{\tau(m)}\bigr)$ だから, $m \to \infty$ のとき $P_{\check{F}}\bigl(y_{\tau(m)}\bigr) \rightharpoonup z$. $\bigl\{P_{\check{F}}\bigl(y_{\tau(m)}\bigr)\bigr\}_{m=1}^{\infty}$ は $\check{F}$ の点列で, (1) より $\check{F}$ は弱閉だから, $z \in \check{F}$. 次に, Λ が有限集合ではないとする．このとき, 狭義単調増加な関数 $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

が存在し, すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して $y_{\sigma(m)} \in C$ および $m \to \infty$ のとき $\hat{S}_{\sigma(m)} y_{\sigma(m)} \rightharpoonup z$ が成り立つ. $v \in C$ をとり, 点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する.

$$x_n = \begin{cases} y_n & (n \in \sigma(\mathbb{N})); \\ v & (n \notin \sigma(\mathbb{N})). \end{cases}$$

すると, $\{x_n\}$ は C の有界点列であり, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $S_{\sigma(m)} x_{\sigma(m)} = \hat{S}_{\sigma(m)} y_{\sigma(m)}$ が成り立つ. よって, $S_{\sigma(m)} x_{\sigma(m)} \rightharpoonup z$. $\{S_n\}$ は F に関して条件 (S) を満たすから, $z \in F$. また, $\{S_{\sigma(m)} x_{\sigma(m)}\}$ は $\overline{C}$ の点列で $\overline{C}$ は弱閉だから, $z \in \overline{C}$. 以上より, Λ が有限集合でない場合も $z \in \check{F}$ が示せた.

最後に (4) を示す. $u \in C$ とし, $z = P_F(u)$ とおく. $z \in F$ だから, $z \in \overline{C}$ であることを示せばよい. $u' = P_{\overline{C}}(z)$ とおく. $\hat{S}_n u' \in \overline{C}$ だから, $\|u' - z\| \leq \left\|\hat{S}_n u' - z\right\|$. 一方, (2) より $\hat{S}_n$ は F に関して擬非拡大であり, $z \in F$ だから, $\left\|\hat{S}_n u' - z\right\| \leq \|u' - z\|$. よって, $\|u' - z\| = \left\|\hat{S}_n u' - z\right\|$. したがって, $u' = \hat{S}_n u'$. つまり, $u' \in \bigcap_n \mathrm{F}(\hat{S}_n)$ である. (2) より $\hat{S}_n$ は $\hat{F}$ に関して擬非拡大であり, (3) より $\{\hat{S}_n\}$ は $\hat{F}$ に関して条件 (S) を満たすので, 補助定理 3.1 より $u' \in \check{F}$, つまり, $P_{\overline{C}} P_F(u) \in F$ である. ゆえに, ($u \in \overline{C}$ だから) 補助定理 2.3 より, $z \in \overline{C}$ である. 以上より, $P_F(u) = z \in \check{F}$ が示せた. また, $\check{F} \subset F$ だから, $P_F(u) = P_{\check{F}}(u)$ である. □

定理 4.1 と補助定理 5.2 を使って, 定理 5.1 を示す.

定理 5.1 の証明. $\check{F} = \overline{C} \cap F$ とおき, $\overline{C}$ から $\overline{C}$ への写像列 $\{\hat{S}_n\}$ を (5.1) で定義する. ただし, $\overline{C}$ は C の閉包である. 補助定理 5.2 (1) より $\check{F}$ は空でない H の閉凸部分集合である. また, 補助定理 5.2 (2) より $\hat{S}_n$ は F に関して擬非拡大であるから, $\hat{S}_n$ は $\check{F}$ に関して擬非拡大である. さらに, 補助定理 5.2 (3) より $\{\hat{S}_n\}$ は $\check{F}$ に関して条件 (S) を満たすことがわかる. また, $n \in \mathbb{N}$ のとき

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) S_n x_n = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) \hat{S}_n x_n$$

であり, $\check{F} \subset \overline{C}$ であるから, 定理 4.1 より, $x_n \to P_{\check{F}}(u)$. また, 補助定理 5.2 (4) より, $P_F(u) = P_{\check{F}}(u)$ であるから, $x_n \to P_F(u)$ である. □

参考文献

[1] K. Aoyama, *Halpern's iteration for a sequence of quasinonexpansive type mappings*, Nonlinear mathematics for uncertainty and its applications, 2011, pp. 387–394.

[2] ———, *Viscosity approximation method for quasinonexpansive mappings with contraction-like mappings*, Nihonkai Math. J. **27** (2016), 167–180.

[3] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[4] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[5] ———, *A note on the hybrid steepest descent methods*, Fixed point theory and its applications, 2013, pp. 73–80.

[6] ———, *Viscosity approximation methods with a sequence of contractions*, Cubo **16** (2014), 9–20.

[7] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[8] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

[9] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Fixed point and mean convergence theorems for a family of λ-hybrid mappings*, J. Nonlinear Anal. Optim. **2** (2011), 87–95.

[10] ———, *Uniform mean convergence theorems for hybrid mappings in Hilbert spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2012), 2012:193, 13.

[11] ———, *Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11.

[12] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Proximal point methods for monotone operators in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 259–281.

[13] K. Aoyama and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of strongly nonexpansive sequences in a banach space*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, to appear.

[14] ———, *Approximation of zeros of accretive operators in a Banach space*, Israel J. Math. **220** (2017), 803–816.

[15] H. H. Bauschke, *The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 150–159.

[16] W. G. Dotson Jr., *Fixed points of quasi-nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 167–170.

[17] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[18] F. Kohsaka, *Existence and approximation of common fixed points of two hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **16** (2015), 2193–2205.

[19] Y. Kurokawa and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonspreading mappings in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 1562–1568.

[20] M. O. Osilike and F. O. Isiogugu, *Weak and strong convergence theorems for nonspreading-type mappings in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal. **74** (2011), 1814–1822.

[21] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71–83.

[22] T. Suzuki, *Moudafi's viscosity approximations with Meir-Keeler contractions*, J. Math. Anal. Appl. **325** (2007), 342–352.

[23] 宮島静雄, 関数解析, 横浜図書, 2005.

[24] 青山耕治, ハイブリッド写像の不動点定理と平均収束定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **1820** (2012), 1–10.

[25] ______, *Halpern* 型不動点近似アルゴリズムとハイブリッド最急降下法, 京都大学数理解析研究所講究録 **1923** (2014), 172–178.

[26] ______, 非拡大写像および擬非拡大写像の不動点近似法について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1963** (2015), 100–107.

[27] ______, 増大作用素の零点近似について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2041** (2017), 92–99.

[28] ______, *An iterative method for generalized split feasibility problems*, 京都大学数理解析研究所講究録 **2065** (2018), 19–29.

[29] 高橋涉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[30] ______, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.